Mathématiques
R. GÉDON

Problèmes multiplicatifs (et de division) Classification et représentations (G. Vergnaud)

Proportion simple

La structure de proportion simple met en jeu deux espaces de mesures (grandeurs) différents, M_1 et M_2, liés par la relation $f(x) = x\,f(1)$.

f est une fonction linéaire : $\begin{cases} f(x + x') = f(x) + f(x') & \text{(additivité)} \\ f(k\,x) = k\,f(x) & \text{(homogénéité de la multiplication scalaire)} \end{cases}$

M_1	M_2
x	$f(x)$
x'	$f(x')$

Multiplication

Calcul de f(x) connaissant x et f(1).

Exemple : Quel est le prix de 16 albums vendus chacun 2 € ?

Division de type 1 (partition)

Calcul de f(1) connaissant x et f(x).

Exemple : L'achat de 47 livres de lecture a coûté 564 €. Quel est le prix d'un livre ?

Division de type 2 (quotition)

Calcul de x connaissant f(1) et f(x).

Exemple : Un tube de colle est vendu 2 €. Combien peut-on en avoir pour 8 € ?

Quatrième proportionnelle

Calcul de f(x') connaissant x, f(x) et x'.

Remarque : Le calcul de f(x') connaissant x, f(x) et x' revient au même compte tenu de la symétrie de la relation de proportionnalité entre deux grandeurs.

Exemple : 15 stylos coûtent 45 €. Combien coûtent 139 stylos ?

Proportion simple composée

La structure de proportion simple composée met en jeu trois espaces de mesures, M_1, M_2 et M_3, une fonction linéaire f lie M_1 à M_2 et une fonction linéaire g lie M_2 à M_3. M_1 et M_3 sont liés (transitivité) par $g \circ f$, la composée de f et g. Nous retrouvons les trois types de problèmes précédents (multiplication, partition et quotition).

M_1	M_2	M_3
x_1	$f(x_1)$	
	x_2	$g(x_2)$
x_1		$g \circ f(x_1)$

Exemple 1 (multiplication) : Une institutrice commande 4 boîtes de feutres. Dans chaque boîte il y a 8 feutres. Un feutre coûte 3 €. Combien l'institutrice paye-t-elle en tout ?

Exemple 2 (partition) : Pour les fêtes de Noël, le comité d'entreprise commande des cartons de ballons. Dans chaque carton il y a 36 ballons. La facture s'élève à 6 156 €. Quel est le prix d'un ballon ?

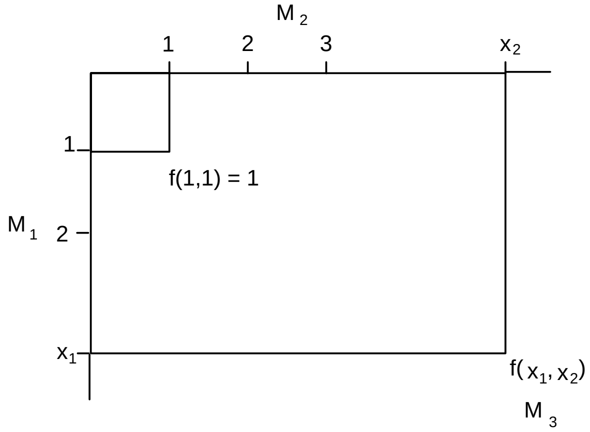
Exemple 3 (quotition) : Pour les fêtes de Noël, le comité d'entreprise commande des cartons de 36 ballons. Chaque ballon est vendu 3 €. La facture s'élève à 6 156 €. Combien y aura-t-il de cartons ?

Produit de mesures

La structure de produit de mesures renvoie à la composition cartésienne de deux espaces de mesures, indépendants, M_1 et M_2, en un troisième, M_3, lié aux deux précédents par la relation $f(x_1,x_2) = x_1\,x_2$.

f est une fonction bilinéaire, en particulier si on fixe la valeur x_2 de M_2, M_1 et M_3 sont proportionnelles et, si on fixe la valeur x_1, M_2 et M_3 sont proportionnelles.

Notons que $f(1,1) = 1$, seuls les types « multiplication » (calcul de $f(x_1,x_2)$ connaissant x_1 et x_2) et « quotition » (calcul de x_2 connaissant x_1 et $f(x_1,x_2)$) relèvent de cette structure.

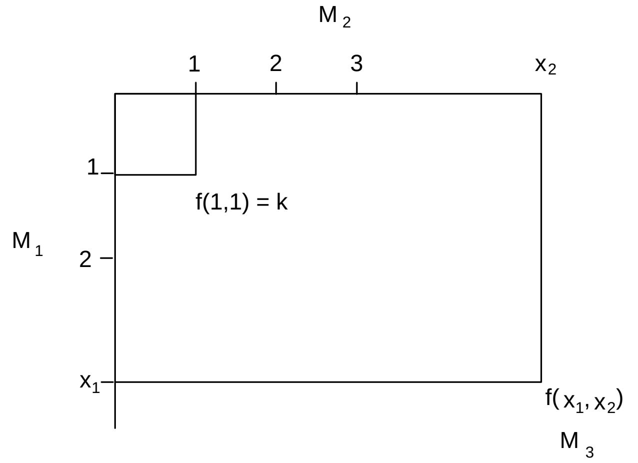


Exemple 1 (multiplication) : Quelle est l'aire d'un rectangle de 24 m sur 11 m ?

Exemple 2 (multiplication) : Julie a 4 robes et 5 corsages différents. De combien de manières peut-elle se vêtir ?

Proportion double

C'est la généralisation du cas précédent, la relation liant l'espace de mesure M_3 aux deux espaces indépendants M_1 et M_2 est $f(x_1,x_2) = x_1\ x_2\ f(1,1)$.



Trois types de problèmes font partie de cette structure :

Multiplication

Calcul de $f(x_1,x_2)$ connaissant x_1, x_2 et $f(1,1)$.

Exemple : Un groupe de 79 personnes passe 12 nuits à l'hôtel. Le prix de la chambre est de 37 € par personne et par jour. Combien le groupe doit-il payer pour les 12 nuits ?

Division de type 1

Calcul de $f(1,1)$ connaissant x_1, x_2 et $f(x_1,x_2)$.

Division de type 2

Calcul de x_2 connaissant x_1, $f(1,1)$ et $f(x_1,x_2)$.